

**В. П. ОЛЬШАНСЬКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСЬКИЙ**

### **АВТОКОЛИВАННЯ, ОПИСАНІ УЗАГАЛЬНЕНИМ РІВНЯННЯМ ВАН ДЕР ПОЛЯ**

Розглянуто квазілінійні автоколивання, представлені узагальненим рівнянням Ван дер Поля. Узагальнення проведено заміною в названому рівнянні квадрату швидкості на її довільний невід'ємний степінь. Методом енергетичного балансу побудовано наближений аналітичний розв'язок, який описує вихід коливальної системи на режим усталених автоколивань. Одержано компактную формулу для обчислення амплітуди цього режиму і доведено, що вона не залежить від початкових умов. Обчислення вказаної амплітуди пов'язане з використанням таблиці гамма-функції. Показано, що одержаний наближений аналітичний розв'язок в окремих випадках узагальнює відомі результати в теорії коливань. Для висвітлення похибок цього розв'язку додатково проведено чисельне інтегрування узагальненого диференціального рівняння на комп'ютері для конкретних числових даних. Задовільна узгодженість чисельних результатів, одержаних двома способами, підтвердила придатність наближених формул до проведення інженерних розрахунків. Досліджено також коливання, які описує узагальнене рівняння після заміни на протилежний знак дисипативної сили. Тоді рух коливальної системи залежить від початкових умов. При менших за порогове стартових відхиленнях осцилятора від положення статичної рівноваги він виконує вільні затухаючі коливання. У випадку більших за порогове початкових відхилень відбувається розгойдування вільних коливань і з плином часу розмахи осцилятора прямують до нескінченності за обмежений проміжок часу. Виведена формула порогового відхилення дозволяє судити про стійкість динамічної системи при різних показниках нелінійності в рівнянні руху та різних початкових збуреннях.

**Ключові слова:** автоколивання, узагальнене рівняння Ван дер Поля, метод енергетичного балансу, чисельний розв'язок задачі Коші.

**В. П. ОЛЬШАНСКИЙ, С. В. ОЛЬШАНСКИЙ**

### **АВТОКОЛЕБАНИЯ, ОПИСАННЫЕ ОБОБЩЕННЫМ УРАВНЕНИЕМ ВАН ДЕР ПОЛЯ**

Рассмотрено квазилинейные автоколебания, представленные обобщенным уравнением Ван дер Поля. Обобщение проведено заменой в названном уравнении квадрата скорости на ее произвольную неотрицательную степень. Методом энергетического баланса построено приближенное аналитическое решение, которое описывает выход колебательной системы на режим установившихся автоколебаний. Получена компактная формула для вычисления амплитуды этого режима и доказано, что она не зависит от начальных условий. Вычисление указанной амплитуды связано с использованием таблицы гамма-функции. Показано, что полученное приближенное аналитическое решение в отдельных случаях обобщает известные результаты в теории колебаний. Для выявления погрешностей этого решения дополнительно проведено численное интегрирование обобщенного дифференциального уравнения на компьютере для конкретных численных данных. Удовлетворительная согласованность численных результатов, полученных двумя способами, подтвердила пригодность приближенных формул для проведения инженерных расчетов. Исследованы также колебания, которые описывает обобщенное уравнение после замены на противоположный знак диссипативной силы. Тогда движение колебательной системы зависит от начальных условий. При стартовых отклонениях осцилятора от положения статического равновесия, величина которых меньше порогового, осцилятор совершает свободные затухающие колебания. В случае начальных отклонений, больших порогового, происходит раскачивание свободных колебаний и с течением времени размахи осцилятора стремятся к бесконечности на ограниченном промежутке времени. Выведенная формула порогового отклонения дает возможность делать заключение об устойчивости динамической системы при различных показателях нелинейности в уравнении движения и различных начальных возмущениях.

**Ключевые слова:** автоколебания, обобщенное уравнение Ван дер Поля, метод энергетического баланса, численное решение задачи Коши.

**V. P. OLSHANSKIY, S. V. OLSHANSKIY**

### **SELF-OSCILLATIONS DESCRIBED BY THE GENERALIZED VAN DER POL EQUATION**

Quasilinear self-oscillations, represented by the generalized Van der Pol equation, are considered. The generalization of the equation is carried out by replacing the second degree of the velocity by its arbitrary non-negative degree. An approximate analytical solution, describing the transition of the oscillatory system to the regime of steady-state self-oscillations, is constructed using the energy balance method. A compact formula is obtained for calculating the amplitude of this regime and it is proved that it does not depend on the initial conditions. The calculation of the indicated amplitude involves using the table of gamma functions. It is shown that in some cases the obtained approximate analytical solution generalizes the known results of the theory of oscillations. To identify the errors of this solution, we integrated the generalized differential equation numerically using a computer for specific numerical data. The satisfactory consistency of the numerical results obtained by applying two different methods confirmed the adequacy of the approximate formulas for engineering calculations. The oscillations described by the generalized equation with the dissipative force of opposite sign are also studied. In this case the motion of the oscillatory system depends on the initial conditions. For the deviations of the oscillator from the position of static equilibrium smaller than a threshold value, free damped oscillations occur. In the case of large initial deviations beyond the threshold, free oscillations build up and over time the oscillator sweeps tend to the infinity for a limited period of time. The threshold deviation formula is derived which makes it possible to draw a conclusion about the stability of a dynamic system for various nonlinearity indices in the equation of motion and various initial perturbations.

**Key words:** self-oscillations, generalized Van der Pol equation, energy balance method, numerical solution of the Cauchy problem.

**Вступ.** Автоколивання досить поширений вид нелінійних коливань неконсервативних систем. Вони мають місце в акустиці, електро- і радіотехніці, металообробці, гальмах транспортних засобів, системах автоматичного управління тощо. Тому важливо належним чином моделювати їх, щоб зменшити їх шкідливий вплив або посилити корисний вплив на робочий процес.

**Огляд літературних джерел.** Автоколивання вже тривалий час є предметом наукових досліджень. Починаючи з академіка О. О. Андропова [1], їх теорія входить окремими розділами в монографії і підручники з теорії коливань [2 – 6]. Їм присвячено також окремі спеціальні видання, з яких виділимо [7, 8]. В останні роки загальну теорію використовують для моделювання автоколивань певних елементів конструкції [9 – 12]. При висвітленні теорії автоколивань часто звертаються до рівняння Ван дер Поля [3, 4]. Тому постає питання, як зміняться його

можливості при внесенні до нього певних змін, чим і зумовлена мета роботи.

**Метою статті** є аналіз автоколивань, які буде описувати рівняння Ван дер Поля після узагальнення його заміною *квадратичної нелінійності* на довільну степеневу з невід'ємним показником степеня.

**Узагальнене рівняння і наближений його розв'язок.** Розглядаємо рух, який описує диференціальне рівняння:

$$m\ddot{x} - (K_1 - K_2|x|^v)\dot{x} + cx = 0, \quad (1)$$

при початкових умовах:

$$x(0) = a_0; \quad \dot{x}(0) = 0. \quad (2)$$

В (1), (2) –  $m$  – маса осцилятора;  $K_1 > 0$ ,  $K_2 > 0$  – сталі коефіцієнти;  $v \geq 0$  – показник нелінійності;  $c$  – коефіцієнт пружності;  $x = x(t)$  – переміщення системи, як функція часу  $t$ ;  $a_0$  – стартове відхилення осцилятора від положення рівноваги; крапка над  $x$  означає похідну за часом  $t$ .

При  $v = 2$  рівняння (1) переходить у класичне рівняння Ван дер Поля.

Якщо в (1)  $v = 0$ , то рівняння стає лінійним. При  $K_1 < K_2$  воно описує вільні затухаючі коливання, розмахи яких спадають за експоненціальним законом. При  $K_1 = K_2$  затухання відсутнє, а при  $K_1 > K_2$  відбувається розгойдування коливань. Ці варіанти руху детально висвітлено в [5]. Тому далі вважаємо, що  $v > 0$ .

Наближений розв'язок рівняння (1) подамо у вигляді:

$$x(t) = a(t)\cos(\omega t), \quad (3)$$

де  $\omega = \sqrt{\frac{c}{m}}$ ,  $a(0) = a_0$ ,  $a(t)$  – функція, що змінюється повільно.

Коефіцієнти  $K_1, K_2$  вважаємо достатньо «малими», щоб виконувалась нерівність:

$$|K_1 - K_2(\max x(t))^v| \ll 2\sqrt{mc}.$$

Дотримуючись [6], зміну потенціальної енергії  $\Delta\Pi$  за напівцикл коливань наближено подаємо виразом:

$$\Delta\Pi = c \frac{\pi}{\omega} a \frac{da}{dt} = \pi m \omega a \frac{da}{dt}, \quad (4)$$

а роботу *дисипативної сили*  $A_{\text{дс}}$  – інтегралом:

$$A_{\text{дс}} = K_1 a^2 \omega^2 \int_0^{\pi/\omega} \sin^2(\omega t) dt - K_2 a^{2+v} \omega^2 \int_0^{\pi/\omega} |\cos(\omega t)|^v \sin^2(\omega t) dt.$$

Далі приймемо до уваги, що [13]:

$$\int_0^{\pi/\omega} \sin^2(\omega t) dt = \frac{\pi}{2\omega}; \quad \int_0^{\pi/\omega} |\cos(\omega t)|^v \sin^2(\omega t) dt = \frac{1}{2\omega} \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+4}{2}\right)},$$

де  $\Gamma(z)$  – гамма-функція.

Тоді:

$$A_{\text{дс}} = \frac{a^2 \omega}{2} \left[ \pi K_1 - \sqrt{\pi} K_2 a^v \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{v+4}{2}\right)} \right]. \quad (5)$$

Згідно з методом енергетичного балансу:

$$\Delta\Pi = A_{\text{дс}},$$

що, з урахуванням (4) і (5), набуває вигляд:

$$\frac{da}{dt} = \gamma_1 a - \gamma_2 a^{v+1}, \quad (6)$$

$$\text{де } \gamma_1 = \frac{K_1}{2m}; \quad \gamma_2 = \frac{K_2}{2m} \frac{\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{v+4}{2}\right)}.$$

Після розділення змінних в (6) та інтегрування отримуємо:

$$\int \frac{da}{\gamma_1 a - \gamma_2 a^{v+1}} = \frac{1}{\gamma_1} \left( \int \frac{da}{a} + \int \frac{b a^{v-1}}{1 - b a^v} da \right) = \frac{1}{v \gamma_1} \ln \left| \frac{a^v}{1 - b a^v} \right| = t + A.$$

де  $b = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}$ ,  $A$  – довільна стала.

Задовольняючи початковій умові, знаходимо, що:

$$A = \frac{1}{v \gamma_1} \ln \left| \frac{a_0^v}{1 - b a_0^v} \right|.$$

Отже, розв'язок рівняння (6) має вигляд:

$$\ln \left| \frac{a^v (1 - b a_0^v)}{a_0^v (1 - b a^v)} \right| = \gamma_1 v t.$$

Звідки випливає, що:

$$a(t) = \frac{a_0 a_*}{\left[ a_0^v + (a_*^v - a_0^v) e^{-v \gamma_1 t} \right]^{1/v}}. \quad (7)$$

Тут:

$$a_* = \left( \frac{1}{b} \right)^{1/v} = \left[ \frac{K_1 \sqrt{\pi}}{K_2} \frac{\Gamma\left(\frac{v+4}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right)} \right]^{1/v}. \quad (8)$$

Із (7) граничним переходом одержуємо:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = a_*,$$

незалежно від  $a_0$ .

Таким чином,  $a_*$  – це амплітуда автоколивань в усталеному режимі, причому її нескладно обчислити за формулою (8).

Покажемо, що усталений режим є стійким граничним циклом на фазовій площині.

Якщо  $a_0 < a_*$ , то  $\left[ a_0^v + (a_*^v - a_0^v) e^{-v \gamma_1 t} \right]^{1/v} > a_0$ ,  $a(t) < a_*$ . В цьому випадку при  $t \rightarrow \infty$   $a(t)$  прямує до  $a_*$  знизу.

Якщо  $a_0 > a_*$ , то  $\left[ a_0^v + (a_*^v - a_0^v) e^{-v \gamma_1 t} \right]^{1/v} < a_0$ ,  $a(t) > a_*$ . Тоді при  $t \rightarrow \infty$   $a(t)$  прямує до  $a_*$  зверху.

Отже, граничний цикл при  $a(t) = a_*$  є стійким.

Розглянемо додатково, якими будуть вирази  $a_*$  і  $a(t)$  при  $v = 2$ , що відповідає класичному рівнянню ван дер Поля. Для вказаного  $v$ :

$$\Gamma(3) = 2; \quad \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \quad \text{і}$$

$$a_* = 2 \sqrt{\frac{K_1}{K_2}}; \quad a(t) = \frac{a_0 a_*}{\sqrt{a_0^2 + (a_*^2 - a_0^2) e^{-\frac{K_1}{m} t}}} = \frac{a_0 \sqrt{\frac{K_1}{K_2}} e^{\frac{K_1}{m} t}}{\sqrt{\frac{K_1}{K_2} + \frac{a_0^2}{4} \left( e^{\frac{K_1}{m} t} - 1 \right)}}. \quad (9)$$

Якщо задати  $m = 1$  кг,  $\frac{K_1}{K_2} = 1$  м<sup>2</sup>,  $K_1 = \varepsilon$ , то  $a_* = 2$  м і вираз (9) перейде в формулу, що одержана в [4]

асимптотичним методом, в першому наближенні. Вираз (9) є також в [3].

Щоб отримати інформацію про фактичні похибки наближеного розв'язку (3), (7), розглянемо приклади розрахунку.

**Приклад 1.** Для проведення обчислень приймаємо:  $m = 3$  кг;  $c = 2700$  Н/м;  $K_1 = 12$  Нс/м;  $v = 0,4$ ;

$K_2 = 84$  нс/м<sup>1,4</sup>. Для цих числових даних:  $\Gamma\left(\frac{v+4}{2}\right) \approx 1,10180$ ;  $\Gamma\left(\frac{v+1}{2}\right) \approx 1,29806$  і обчислене за формулою (8)

$a_* \approx 0,02141$  м. Значення гамма-функцій взяли з таблиці 6.1 стор. 91 в [14]. Величини перших п'яти піків  $a(t_i)$ , знайдені за формулою (7), і час їх досягнення  $t_i = \frac{2\pi i}{\omega}$  вказано в табл. 1 і табл. 2. Результати в табл. 1 одержано при  $a_0 = 0,01$  м, а в табл. 2 – при  $a_0 = 0,03$  м. Для порівняння в таблицях записано і більш точні результати, отримані чисельним розв'язанням задачі Коші (1), (2) на комп'ютері. Ці результати виділено позначкою \*.

Таблиця 1 – Значення  $\max x(t)$  і час їх досягнення при  $\nu = 0,4$ ;  $a_0 = 0,01$  м

$i$	$t_i$ , с	$100a(t_i)$ , м	$t_i^*$ , м	$100x(t_i^*)$ , м
1	0,20944	1,1089	0,20937	1,1089
2	0,41888	1,2144	0,41874	1,2144
3	0,62832	1,3149	0,62810	1,3149
4	0,83776	1,4092	0,83749	1,4092
5	1,04720	1,4965	1,04687	1,4966

Таблиця 2 – Значення  $\max x(t)$  і час їх досягнення при  $\nu = 0,4$ ;  $a_0 = 0,03$  м

$i$	$t_i$ , с	$100a(t_i)$ , м	$t_i^*$ , м	$100x(t_i^*)$ , м
1	0,20944	2,8392	0,20956	2,8392
2	0,41888	2,7124	0,41911	2,7125
3	0,62832	2,6113	0,62863	2,6114
4	0,83776	2,5299	0,83814	2,5300
5	1,04720	2,4637	1,04766	2,4639

Як видно з таблиць, наближені результати близькі до умовно точних, одержаних чисельним інтегруванням.

**Приклад 2.** Замінімо в числових даних першого прикладу лише значення  $\nu$  і  $K_2$ . Для проведення розрахунків тепер приймаємо:  $\nu = 1,8$ ;  $K_2 = 7 \cdot 10^4$  нс/м<sup>2,8</sup>. При таких числових даних:  $\Gamma\left(\frac{\nu+4}{2}\right) \approx 1,82736$ ;  $\Gamma\left(\frac{\nu+1}{2}\right) \approx 0,88726$ . Обчислене за формулою (8)  $a_* \approx 0,0166$  м. Пікові значення  $x(t)$  та час їх досягнення, розраховані двома методами, записано в табл. 3 і табл. 4. Результати чисельного інтегрування мають позначку \*.

Таблиця 3 – Значення  $\max x(t)$  і час їх досягнення при  $\nu = 1,8$ ;  $a_0 = 0,007$  м

$i$	$t_i$ , с	$100a(t_i)$ , м	$t_i^*$ , м	$100x(t_i^*)$ , м
1	0,20944	0,9452	0,20897	0,9445
2	0,41888	1,1820	0,41769	1,1865
3	0,62832	1,3832	0,62644	1,3817
4	0,83776	1,5121	0,83541	1,5113
5	1,04720	1,5856	1,04466	1,5854

Таблиця 4 – Значення  $\max x(t)$  і час їх досягнення при  $\nu = 1,8$ ;  $a_0 = 0,025$  м

$i$	$t_i$ , с	$100a(t_i)$ , м	$t_i^*$ , м	$100x(t_i^*)$ , м
1	0,20944	1,9410	0,21399	1,9341
2	0,41888	1,7771	0,42468	1,7741
3	0,62832	1,7112	0,63470	1,7113
4	0,83776	1,6840	0,84451	1,6839
5	1,04720	1,6712	1,05422	1,6714

У другому прикладі похибки наближеного методу більші, ніж у першому, але формули (3), (7) і (8) можна вважати придатними для інженерних розрахунків.

Зі збільшенням показника  $\nu$  система швидше виходить на усталений режим автоколивань.

**Видозмінене рівняння Ван дер Поля.** З'ясуємо далі, який рух буде описувати рівняння:

$$m \ddot{x} + \left( K_1 - K_2 |x|^v \right) \dot{x} + c x = 0, \quad (10)$$

що відрізняється від (1) знаком другого доданку. Подаючи його розв'язок добутком (3), методом енергетичного балансу тепер отримуємо:

$$a(t) = \frac{a_0 a_*}{\left[ a_0^v + (a_*^v - a_0^v) e^{v \gamma_1 t} \right]^{1/v}}, \quad (11)$$

де  $a_*$ , як і раніше, визначається формулою (8).

Із (11) випливає, що при  $a_0 < a_*$   $\lim_{t \rightarrow \infty} a(t) = 0$ . Це означає, що в цьому випадку рівняння (10) описує затухаючі коливання, що тривають до нескінченності.

Якщо в (11),  $a_0 > a_*$ , то  $\lim_{t \rightarrow t_*} a(t) = \infty$ , де

$$t_* = \frac{1}{v \gamma_1} \ln \frac{a_0^v}{a_0^v - a_*^v}.$$

Отже, при  $a_0 > a_*$  відбувається розгойдування коливань, внаслідок чого втрачає стійкість коливальна система за обмежений проміжок часу.

Порогове значення  $a_0 = a_*$  визначається формулою (8).

**Приклад 3.** Для числових даних, що в прикладі 2, порогове значення  $a_0 = 0,0166$  м. Щоб підтвердити цей результат, проведено чисельне інтегрування рівняння (10) на комп'ютері для інших значень  $a_0$ . Одержані графіки коливань зображено на рис. 1 і рис. 2.

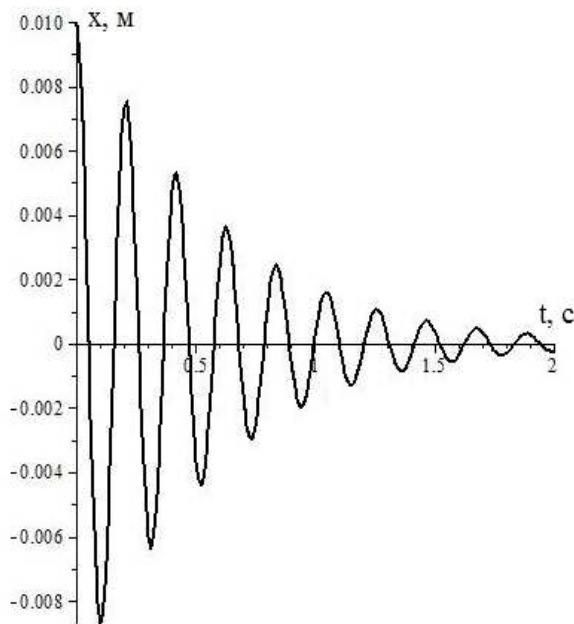


Рис. 1 – Графік коливань при  $a_0 = 0,01$  м.

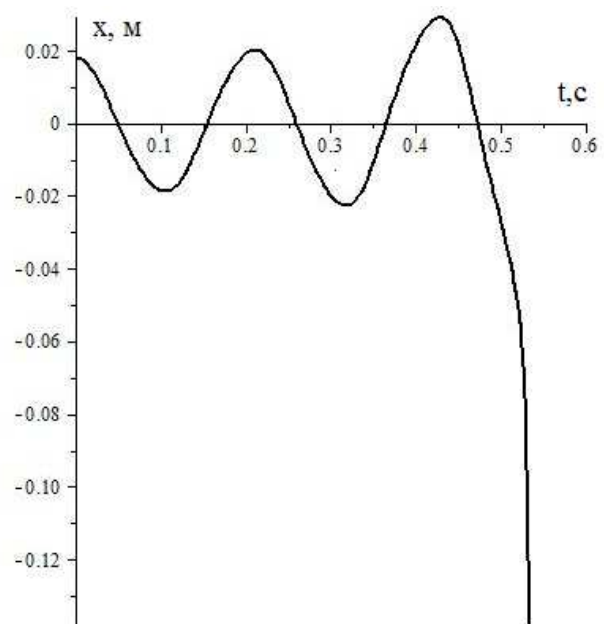


Рис. 2 – Графік коливань при  $a_0 = 0,018$  м.

При  $a_0 = 0,01 < 0,0166$  м відбувається згасання вільних коливань, а при  $a_0 = 0,018 > 0,0166$  м система втрачає стійкість.

**Перспектива подальших досліджень.** Вище розглядали автоколивання та вільні коливання осцилятора з лінійною характеристикою пружності. Потребує належної уваги аналогічний аналіз коливань систем з нелінійними характеристиками жорсткості, які поширені на практиці [2].

**Висновки.** Дослідження показало, що узагальнене рівняння Ван дер Поля теж описує квазілінійні автоколивання осцилятора. При більших показниках нелінійності осцилятор швидше виходить на усталений режим автоколивань. Заміна знаку дисипативної сили в рівнянні коливань змінює вид руху, який воно моделює. В залежності від початкового збурення, рівняння описує або вільні згасаючі коливання, або процес розгойдування ко-

ливань з втратою стійкості системи за обмежених проміжків часу.

#### Список літератури

1. Андронов А. А., Вит А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. – Москва : Гос. изд-во физ.-мат. литературы, 1959. – 916 с.
2. Аврамов К. В., Михлин Ю. В. Нелинейная динамика упругих систем. – Москва-Ижевск : Институт компьютерных исследований, 2015. – Т. 1. – 716 с.
3. Бабаков И. М. Теория колебаний. – Москва : Дрофа, 2004. – 591 с.
4. Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – Москва : Наука, 1974. – 504 с.
5. Василенко М. В., Алексейчук О. М. Теорія коливань і стійкості руху. – Київ : Вища школа, 2004. – 525 с.
6. Пановко Я. Г. Основы прикладной теории колебаний и удара. – Ленинград : Машиностроение, 1976. – 320 с.
7. Лазарев Г. С. Автоколебания при резании металлов. – Москва : Высшая школа, 1971. – 244 с.
8. Крагельский И. В., Гиттис Н. В. Фрикционные автоколебания. – Москва : Наука, 1987. – 181 с.
9. Войтюк Д. Г. Физико-механический анализ автоколебательных режимов работы вибрационной рыхлительной лапы культиватора // Вісник ХНТУСГ. – 2012. – № 2(66). – С. 10 – 16.
10. Ловейкин В. С., Човнюк Ю. В., Костина О. Ю. Дослідження релаксаційних автоколивань з спрощеної характеристики тертя у скребкових конвеєрах при транспортуванні сипких матеріалів // Механізація сільськогосподарських виробництв. Вісник ХНТУСГ. – 2013. – Вип. 135. – С. 328 – 335.
11. Бурлака В. В., Ольшанський В. П., Малець О. М. До розрахунку релаксаційних автоколивань у скребкових конвеєрах // Физические и компьютерные технологии : 19 Международная научно-техническая конференция. Труды конференции. – Харьков : ФЭД, 2014. – С. 120 – 123.
12. Ольшанський В. П., Тищенко Л. М., Ольшанський С. В. Динаміка дисипативних осциляторів. – Харків : Мисьдрук, 2016. – 264 с.
13. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М. : Наука, 1962. – 1100 с.
14. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям (с формулами, графиками и математическими таблицами). – М. : Наука, 1979. – 832 с.

#### References (transliterated)

1. Andronov A. A., Vit A. A., Khaikin S. E. *Teoriya kolebaniy* [Theory of oscillations]. Moscow, Gos. izd-vo fiz.-mat. literatury Publ., 1959. 916 p.
2. Avramov K. V., Mikhlin Yu. V. *Nelineynaya dinamika uprugikh sistem* [Nonlinear dynamics of elastic systems]. Moscow-Izhevsk, Institute kompyuternykh issledovaniy Publ., 2015, vol. 1. 716 p.
3. Babakov I. M. *Teoriya kolebaniy* [Theory of fluctuations]. Moscow, Drofa Publ., 2004. 591 p.
4. Bogolyubov N. N., Mitropol'skiy Yu. A. *Asimptoticheskiye metody v teorii nelineynykh kolebaniy* [Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations]. Moscow, Nauka Publ., 1974. 504 p.
5. Vasilenko M. V., Alekseychuk O. M. *Teoriya kolyvan' i stiykosti rukhu* [Theory of oscillations and stability of motion]. Kiev, Vyshha shkola Publ., 2004. 525 p.
6. Panovko Ya. G. *Osnovy prikladnoy teorii kolebaniy i udara* [Fundamentals of the applied theory of oscillations and shock]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1976. 320 p.
7. Lazarev G. S. *Avtokolebaniya pri rezanii metallov* [Auto-oscillations during metal cutting]. Moscow, Vyshha shkola Publ., 1971. 244 p.
8. Kragel'skiy I. V., Gittis N. V. *Friktsionnyye avtokolebaniya* [Frictional self-oscillations]. Moscow, Nauka Publ., 1987. 181 p.
9. Voytyuk D. G., Chovnyuk Yu. V., Gumenyuk Yu. O., Gutsol A. P. Fiziko-mekhanicheskiy analiz avtokolebatel'nykh rezhimov raboty vibratsionnoy rykhlytel'noy lapy kultivatora [Physico-mechanical analysis of self-oscillating modes of a vibrating cultivating point of a cultivator]. *Vibratsiyyi v tekhnitsi ta tekhnologiyakh. Vseukrayins'kyi naukovy-tekhnichnyy zhurnal* [Vibrations in Engineering and Technology. All-Ukrainian Scientific and Technical Journal]. 2012, no. 2(66), pp. 10–16.
10. Loveykin V. S., Chovnyuk Yu. V., Kostina O. Yu. Doslidzhennya relaksatsiynykh avtokolyvan' z sproshhenoyi kharakterystyky tertya u skrebkovykh konveyerakh pry transportuvanni sypanykh materialiv [Investigation of relaxation self-oscillations on the simplified characteristic of friction in scraper conveyors during transportation of bulk materials]. *Mekhanizatsiya sil's'kogospodars'kykh vyrobnytstv. Visnyk KHNTUSG* [Mechanization of agricultural productions, Bulletin of KhNTUSG]. 2013, no. 135, pp. 328–335.
11. Burlaka V. V., Ol'shans'kiy (Olshanskiy) V. P., Malets' O. M. Do rozrakhunku relaksatsiynykh avtokolyvan' u skrebkovykh konveyerakh [To the calculation of relaxation self-oscillations in scraper conveyors]. *Fizicheskie i kompyuternye tekhnologii : 19 Mezhdunarodnaya nauchno-tekhnicheskaya konferentsiya. Trudy konferentsii* [Physical and computer technologies : 19th International Scientific and Technical Conference. Conference proceedings]. Kharkov, FED Publ., 2014. pp. 120–123 p.
12. Ol'shans'kiy (Olshanskiy) V. P., Tishchenko L. N., Ol'shans'kiy (Olshanskiy) S. V. *Dynamika dysypatyvnykh ostsylyatoriv* [Dynamics of Dissipative Oscillators]. Kharkiv, Mis'druk Publ., 2016. 264 p.
13. Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M. *Tablitsy integralov, summ, ryadov i proizvedeniy* [Tables of integrals, sums, series and products]. Moscow, Nauka Publ., 1962. 1100 p.
14. Abramovits M., Stigan I. *Spravochnik po spetsial'nym funktsiyam (s formulami, grafikami i matematicheskimi tablitsami)* [Handbook of special functions (with formulas, graphs and mathematical tables)]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 832 p.

Надійшла (received) 16.01.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Ольшанський Василь Павлович (Ольшанский Василий Павлович, Olshanskiy Vasiliy Pavlovich)** – доктор фізико-математичних наук, професор, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (066) 010-09-55.; e-mail: OlshanskiyVP@gmail.com.

**Ольшанський Станіслав Васильович (Ольшанский Станислав Васильевич, Olshanskiy Stanislav Vasilevich)** – кандидат фізико-математичних наук, Харківський національний технічний університет сільського господарства імені П. Василенка, м. Харків; тел.: (057) 343-29-41; email: stasolsh77@gmail.com.